

УДК:622.62

Лысенко Т. В., Бавнегра Л. В., Морозов Ю. А., Цибенко О. В.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИТЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА SPH**

В литейном производстве в настоящее время широко применяется математическое моделирование литейных процессов, с помощью которого осуществляется анализ эффективности технологии изготовления изделия и ее оптимизация в виртуальном пространстве, без дополнительных затрат на изготовление пробных партий отливок. Это самый действенный и надежный способ разработки технологии литья, позволяющий снизить затраты как на подготовку производства, так и на само производство отливок.

В основе математической модели литейных процессов лежат уравнения переноса: уравнения теплопроводности, Навье-Стокса, диффузии, кинетические уравнения фазовых превращений и т. д. [1].

Для решения многомерных нелинейных, нестационарных задач, характерных для литейных процессов и описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, обычно применяют численные методы и вычислительную технику. Частные производные, входящие в дифференциальные уравнения, заменяют разностными соотношениями. В результате система дифференциальных уравнений аппроксимируется системой алгебраических уравнений, называемой разностной схемой.

Для решения уравнений в частных производных используют три основных метода – метод конечных разностей (МКР), метод конечных объемов (МКО) и метод конечных элементов (МКЭ) [2]. Естественно, что у каждого из выше перечисленных методов есть свои достоинства и недостатки. Каждый из них соответствует определенному классу задач и приводит к некоторым проблемам в других областях.

Альтернативным вариантом моделирования в задачах литейного производства являются бессеточные методы.

Специфика бессеточных методов заключается в том, что для построения функций формы на разных временных шагах используются различные наборы расчетных узлов, которые могут свободно перемещаться, ввиду отсутствия между ними жестких связей. Вследствие этого, наиболее целесообразно использовать эти методы для решения тех задач, где область расчета подвергается значительными деформациям. Одним из наиболее распространенных методов, относящихся к классу бессеточных, является метод сглаженных частиц – SPH (SmoothedParticleHydrodynamics).

В методе SPH знание связей между узлами не требуется ни на одном этапе численного решения задач, что обуславливает ряд его преимуществ перед другими бессеточными методами, а именно: относительная простота программной реализации, ввиду отсутствия потребности в использовании сложных алгоритмов численного интегрирования, построения или адаптации сетки; использование простых в реализации алгоритмов определения свободных границ и границ раздела; непосредственный переход к решению трехмерных задач без привлечения дополнительных, не характерных для двумерных случаев, алгоритмов [3].

Целью настоящей работы является оценка возможности использования метода SPH для моделирования литейных процессов.

Основная суть метода SPH заключается в приближении формулы:

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1)$$

где  $f$  – произвольная непрерывная функция радиус-вектора  $\mathbf{r}$ ;  $\delta(\mathbf{r})$  – дельта функции Дирака;  $\Omega$  – объем интегрирования содержащий  $\mathbf{r}$ , следующей цепочкой преобразований.

Вначале мы заменяем обобщенную функцию  $\delta(r)$  аналитической функцией  $W(r - r', h)$ , которую называют ядром сглаживания (сглаживающей функцией), а  $h$  – радиусом сглаживания. В результате получим:

$$\langle f(r) \rangle = \int_{\Omega} f(r') W(r - r', h) dr' \tag{2}$$

Ядро  $W(r - r', h)$  должно удовлетворять следующим условиям: условие нормировки:

$$\int_{\Omega} f(r') W(r - r', h) dr' = 1, \tag{3}$$

сглаживающая функция должна обладать свойствами дельта функции при  $h \rightarrow 0$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r - r', h) = \delta(r - r'). \tag{4}$$

Компактность носителя (финитность) сглаживающей функции:

$$W(r - r', h) = 0, |r - r'| > kh, \tag{5}$$

где  $k$  – постоянная, связанная со сглаживающей функцией.

В работах Моногана [3] доказано, что при соблюдении этих условий аппроксимация обеспечивает порядок  $O(h^2)$ .

Следующее преобразование состоит в замене интегрирования суммированием по частицам – соседям:

$$\langle f(r_i) \rangle \approx \sum_j \frac{m_j f_j}{\rho_j} W(r_i - r_j, h), \tag{6}$$

где  $j$  – индекс, обозначающий любую соседнюю с  $i$ -ой частицу;  $m_j$  – масса  $j$ -ой частицы;  $\rho_j$  – плотность  $j$ -ой частицы.

Существует много видов сглаживающих функций ядра. В нашей модели мы выбираем функцию ядра в виде кубического сплайна, как показано ниже [5]:

$$W(r_{ij}, h) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \left(\frac{|r_{ij}|}{h}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{|r_{ij}|}{h}\right)^3 & 0 \leq \frac{|r_{ij}|}{h} < 1 \\ \frac{1}{6} \left(2 - \frac{|r_{ij}|}{h}\right)^3 & 1 \leq \frac{|r_{ij}|}{h} < 2 \\ 0 & 2 < \frac{|r_{ij}|}{h} \end{cases}, \tag{7}$$

где  $r_{ij} = (r_i - r_j)$  – в случае 3D моделирования.

Использование такой аппроксимации существенно упрощает вычисление градиента полевой функции  $\nabla f(r)$ , так как достаточно аналитически продифференцировать ядро сглаживания, что даст:

$$\langle \nabla f(r_i) \rangle \approx \sum_j \frac{m_j f_j}{\rho_j} \nabla_i W(r_{ij}, h), \tag{8}$$

при

$$\nabla_i W_{ij} = \nabla W(r_{ij}, h) = \frac{1}{h} \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|} F(|r_{ij}|, h), \tag{9}$$

где  $F(|r_{ij}|, h)$  – производная от функции ядра.

При внесении плотности под знак градиента можно воспользоваться одним из следующих тождеств:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} [\nabla(\rho f(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})\nabla\rho]; \tag{10}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \rho \left[ \nabla \left( \frac{f(\mathbf{x})}{\rho} \right) + \frac{f(\mathbf{x})}{\rho^2} \nabla\rho \right]. \tag{11}$$

Применяя к градиентам в правых частях последних равенств формулу (8), получим:

$$\nabla f(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\rho_i} \left[ \sum_{j=1}^N m_j [f(\mathbf{r}_j) - f(\mathbf{r}_i)] \nabla_i W_{ij} \right]; \tag{12}$$

$$\nabla f(\mathbf{r}_i) = \rho_i \left[ \sum_{j=1}^N m_j \left[ \frac{f(\mathbf{r}_j)}{\rho_j^2} - \frac{f(\mathbf{r}_i)}{\rho_i^2} \right] \nabla_i W_{ij} \right]. \tag{13}$$

Для моделирования жидкости в методе SPH используют уравнения Навье-Стокса в форме Лагранжа. Основные уравнения имеют вид [6]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \mathbf{v}; \tag{14}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}, \tag{15}$$

где  $t$  – время;  $\mathbf{v}$  – скорость жидкости;  $p$  – давление;  $\mu$  – коэффициент вязкости;  $\mathbf{F}$  – внешние силы.

Уравнение (14) известно как уравнение непрерывности, описывающее изменение плотности жидкости с течением времени. Уравнение (15) известно как уравнение импульса, описывающего ускорение жидкости.

Первый член в правой части уравнения (15), связан с градиентом давления, что соответствует силе давления, второй член связан с вязкостью, что соответствует силе вязкости. Внешние силы, используемые здесь, это гравитационные силы и силы отталкивания от границ. Используя SPH-интерполяцию (6) уравнения (14) и (15) запишутся следующим образом:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \nabla W_{ij}; \tag{16}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) - \frac{\xi}{\rho_i \rho_j} \frac{4\mu_i \mu_j}{(\mu_i + \mu_j)} \frac{\mathbf{v}_{ij} \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2 + \eta^2} \right] \nabla_i W_{ij} + \mathbf{F}, \tag{17}$$

где  $\mu_i$  и  $\mu_j$  – динамическая вязкость для  $i$ -ой и  $j$ -ой частицы, соответственно;  $\xi$  – масштабный коэффициент,  $\xi = 4,964$ ;  $\eta$  – малый параметр, необходимый для устранения сингулярности, когда  $r_{ij}^2 \rightarrow 0, (\eta = 0,1h)$ ;  $\rho_i$  – плотность  $i$ -ой частицы, которая определяется следующим образом:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}, \tag{18}$$

где  $N$  – число частиц, лежащих внутри области сглаживания  $\Omega_{\mathbf{r}_i} = \{|\mathbf{r}_{ij}| < kh\}$ .

В случае свободных поверхностей, межфазных границ или разрывов плотности, используется следующее представление для  $\rho_i$ :

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \left( \frac{m_j}{\rho_j} \right) W_{ij}}, \tag{19}$$

Здесь суммирование производится по частицам одного и того же материала.

Величина длины сглаживания должна быть динамически изменяемой, чтобы число соседних частиц оставалось относительно постоянным.

Самый простой подход состоит в обновлении длины сглаживания согласно усредненной плотности:

$$h = h_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/d}, \quad (20)$$

где  $h_0$  – начальная длина сглаживания;  $\rho_0$  – начальная плотность;  $d$  – размерность задачи. Уравнение состояния, необходимое для вычисления давления в (17) имеет вид:

$$P = \beta \left[ \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (21)$$

где  $\beta$  – величина давления.

$$\beta = c^2 \rho_0 / \gamma, \quad (22)$$

где  $c$  – скорость звука.

Для жидкого металла  $\gamma = 7$ .

Модель теплопроводности основана на изменении энтальпии  $H$ :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla(k \nabla T), \quad (23)$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности;  $T$  – температура.

Воспользовавшись SPH-интерполяцией (6), перепишем (23) следующим образом:

$$\frac{dH_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \frac{4k_i k_j}{(k_i + k_j)} (T_i - T_j) \frac{r_{ij} \nabla_i W_{ij}}{r_{ij}^2 + \eta^2}. \quad (24)$$

Данное уравнение обеспечивает непрерывность теплового потока через поверхность раздела сред (например, форма и жидкий металл). Оно также позволяет точно моделировать наличие нескольких фаз с различной удельной проводимостью.

## ВЫВОДЫ

Приведена модификация метода SPH, которая учитывает специфику гидродинамических процессов, характерную для различных видов литья.

В математической модели предусмотрена возможность моделирования двух видов заливки: гравитационного литья и литья под давлением.

Моделирование заполнения формы расплавом осуществляется с учетом процессов теплопередачи. Описанная выше математическая модель легла в основу разработанного численного алгоритма и программного обеспечения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллин А. Д. Компьютерное моделирование литейных процессов с использованием программного комплекса ProCAST / А. Д. Абдуллин // Рациональное управление предприятием. – 2010. – № 6. – С. 46–47.2.
2. Тихомиров М. Д. Основы моделирования литейных процессов. Важные особенности систем моделирования / М. Д. Тихомиров // М. : Литейное производство. – 2004. – № 5. – С. 24–30.
3. Vorobyev A. Particle method for liquid-in-liquid interaction simulation / A. Vorobyev., V. Kriventsev // Proc. of 13th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-13), Kanazawa, Japan. – 2009. – P. 134.
4. Monaghan J. J. (1992), Smoothed particle hydrodynamics, / J. J. Monaghan // Annual Review of Astronomical and Astrophysics – 2010. – № 3. – С. 543–574.
5. Thermal Fragmentation Process of Melt Droplet / Q. Lin., L. Tong., X. Cao, A. Vorobyev, V. Kriventsev // Atomic Energy Science and Technology. – 2009. – Vol. № 43 (7). – С. 604–608 (На китайском).
6. Vorobyev A. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) method in liquid-in-liquid interactions simulation / A. Vorobyev., V. Kriventsev. // Proc. of KIT PhDSymposium 2009, Karlsruhe, Germany. – 2009. – P. 23.

Статья поступила в редакцию 24.01.2014 г.